ISTITUTO LOMBARDO - ACCADEMIA DI SCIENZE E LETTERE
Estratto dai *Rendiconti*, Classe di Scienze (A) — Vol. 110 — 1976

PROIEZIONI ED AUTOVALORI DI OPERATORI LINEARI

Nota del m. e. CARLO FELICE MANARA

Istituto Lombardo di Scienze e Lettere

MILANO
1976

Geometria *Istituto Lombardo (Rend. Sc.)* A 110, 214-219 (1976)

PROIEZIONI ED AUTOVALORI DI OPERATORI LINEARI

Nota del m. e. CARLO FELICE MANARA

(Adunanza dell'8 aprile 1976)

SUNTO. — Dato uno spazio vettoriale V^n ed una matrice quadrata non degenere di ordine n, si dimostra che, sotto certe condizioni, $(n-1)$ autovettori della matrice, proiettati su un iperpiano coordinato, sono autovettori della matrice che si ottiene con una opportuna operazione che può essere considerata come una proiezione, e corrispondono agli stessi autovalori della matrice di partenza.

1. - Nella presente Nota si dimostra un teorema riguardante gli autovalori e gli autovettori di certe matrici quadrate ad elementi reali, soddisfacenti a certe ipotesi. Queste ultime possono essere considerate abbastanza restrittive; tuttavia si dà il caso che certi problemi analoghi a quelli qui considerati si presentino in questioni di statistica, e che l'utilizzazione dei risultati che qui esponiamo si traduca in un certo risparmio di calcoli concreti (1).

La matrice quadrata di ordine n che consideriamo soddisfa alla ipotesi che le somme degli elementi di ogni colonna sono uguali tra loro. Pertanto uno degli autovettori della matrice è il vettore unitario; gli altri sono supposti corrispondenti a certi autovalori tutti reali e diversi tra loro e dall'autovalore che dà l'autovettore unitario.

Si considerano poi i vettori proiezioni degli autovettori su un iperpiano coordinato, e si definisce una certa operazione di 'proiezione' anche per la matrice quadrata; si ottiene che i vettori proiezioni sono ancora autovettori della matrice proiezione.

(1) Per es. i risultati qui esposti sono stati utilizzati da F. Carlevaro e J. J. Snella nella comunicazione presentata al ''Winter Meeting of the Econometric Society'' del gennaio 1976, dal titolo: Efficient estimation of a complete system of demand functions in the presence of autocorrelation.

2. - Sia V^n uno spazio vettoriale reale ad n dimensioni. Indichiamo con N l'insieme dei primi numeri naturali, ponendo cioè

$$N = \{1, 2, \ldots, n\} .$$

I vettori di V^n saranno concepiti come 'colonne' di n elementi. Indicato con j un elemento di N, sia

$$\mathbf{E}(j) = [e_{ik}(j)]$$

la matrice quadrata di ordine n definita da

$$e_{ik}(j) = \delta_{ik} - \delta_{ij}\,\delta_{kj} \qquad i, k, j \in N \quad (^2). \tag{1}$$

Indichiamo poi con $V(j)$ lo spazio dei vettori di V^n aventi nulla la componente di indice j:

$$V(j) = \{\mathbf{x} \mid \mathbf{x} \in V^n, \ x_j = 0\} \qquad j \in N ;$$

preso un qualunque vettore $\mathbf{x} \in V^n$, il vettore $\mathbf{x}^*(j)$ definito da

$$\mathbf{x}^*(j) = \mathbf{E}(j)\,\mathbf{x} \tag{2}$$

appartiene allo spazio $V(j)$, ed è precisamente la proiezione ortogonale di $\mathbf{x}$ su $V(j)$. Si ha chiaramente

$$\mathbf{E}(j) \cdot \mathbf{E}(j) = \mathbf{E}(j) .$$

Sia ora $\mathbf{M}$ una matrice quadrata di ordine n; dalle definizioni poste si ha che la matrice $\mathbf{E}(j)\,\mathbf{M}$ si ottiene dalla matrice data $\mathbf{M}$ sostituendo con degli zeri ogni elemento della riga di indice j.

Sia ora

$$\mathbf{F}(j) = [f_{ik}(j)]$$

la matrice quadrata di ordine n definita da

$$f_{ik}(j) = \delta_{ik} - \delta_{ij} \qquad i, k, j \in N ; \tag{3}$$

(2) Abbiamo indicato con δ_{ik} $(i, k \in N)$ le note funzioni di Kronecker, definite su $N \times N$ dalle condizioni : $i = k$, $\delta_{ik} = 1$; $i \neq k$, $\delta_{ik} = 0$.

indicati con m_{ik} gli elementi della matrice $\mathbf{M}$, si ha quindi che l'elemento di posto corrispondente della matrice $\mathbf{M} \cdot \mathbf{F}(j)$ è dato da

$$m_{ik} - m_{ij} .$$

Ne consegue che la matrice $\mathbf{M} \cdot \mathbf{F}(j)$ si può ottenere dalla matrice $\mathbf{M}$ con le seguenti operazioni: ad ogni colonna della matrice $\mathbf{M}$ si sostituisce la colonna che si ottiene sottraendo dalla colonna data quella di indice j. Ne segue che la colonna di indice j della matrice ottenuta avrà tutti i suoi elementi nulli.

Da quanto precede si trae immediatamente il modo di costruire, partendo da una matrice $\mathbf{M}$ quadrata di ordine n, la matrice

$$\mathbf{M}^*(j) = \mathbf{E}(j) \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{F}(j) . \tag{4}$$

Osservazione. - Quando si considerino le matrici quadrate di ordine n come gli elementi di uno spazio vettoriale di dimensione n^2 secondo il procedimento ben noto, si verifica facilmente che la operazione definita dalla (4), che associa ad una matrice $\mathbf{M}$ la matrice $\mathbf{M}^*(j)$ è una proiezione in tale spazio; si ha infatti:

$$\mathbf{E}(j) \cdot \mathbf{M}^*(j) \cdot \mathbf{F}(j) = \mathbf{M}^*(j) .$$

3. - Sia ora $\mathbf{u}$ il vettore di V^n avente tutte le sue componenti uguali ad 1. Indichiamo la operazione di trasposizione per le matrici ed i vettori con il simbolo « t » in basso a destra e supponiamo che per la matrice $\mathbf{M}$ quadrata di ordine n, valga la ipotesi espressa dalla seguente formula

$$\mathbf{u}_t \mathbf{M} = \varrho \, \mathbf{u}_t \qquad \varrho \in \mathbb{R} . \tag{5}$$

Indichiamo ora con N' l'insieme dei primi $(n-1)$ numeri naturali: poniamo cioè

$$N' = \{1, 2, \ldots, n-1\} .$$

Dalla (5) si trae che il numero reale ϱ che compare in quella formula è un autovalore della matrice $\mathbf{M}$. Siano

$$\lambda_1, \lambda_2, \ldots\ldots, \lambda_{n-1}$$

gli altri $(n-1)$ autovalori della matrice stessa e supponiamo che tali autovalori siano reali, tutti diversi tra loro e ciascuno diverso da ϱ. Si avranno quindi $(n-1)$ relazioni

$$\mathbf{M}\,\mathbf{p}_\alpha = \lambda_\alpha\,\mathbf{p}_\alpha \qquad \alpha \in N' ;$$

essendo $\mathbf{p}_\alpha$ gli autovettori associati agli autovalori λ_α

Dalle ipotesi poste si ha immediatamente che tali vettori sono tutti linearmente indipendenti e che vale, per ciascuno di essi, la relazione

$$\mathbf{u}_t\,\mathbf{p}_\alpha = 0 \qquad \alpha \in N' .$$

Indichiamo con $\mathbf{P}$ la matrice rettangolare di tipo $(n, n-1)$ le cui colonne sono date dagli autovettori $\mathbf{p}_\alpha$.

Da quanto precede si ha che vale la

$$\mathbf{u}_t\,\mathbf{P} = 0 ;$$

relazione che si traduce anche nelle seguenti

$$\sum_{i \in N} p_{i\alpha} = 0\,,\ \alpha \in N' .$$

E' chiaro che il rango della matrice $\mathbf{P}$ vale $n-1$; inoltre le colonne della matrice $\mathbf{P}$ costituiscono una base per lo spazio vettoriale H dei vettori ortogonali ad $\mathbf{u}$.

Indichiamo ora con $\mathbf{U}$ la matrice quadrata di ordine n avente tutti gli elementi uguali ad 1. Si avrà quindi

$$\mathbf{u}_t\,\mathbf{U} = n\,\mathbf{u}_t ;\quad \mathbf{U}\,\mathbf{p}_\alpha = 0\,,\ \alpha \in N' . \tag{6}$$

Dalla (5) e (6) si trae

$$\mathbf{u}_t\,\mathbf{M} = \mathbf{u}_t\,\mathbf{U}\,\varrho/n . \tag{7}$$

Ne consegue che le colonne della matrice

$$\mathbf{M} - \mathbf{U}\,\varrho/n \tag{8}$$

appartengono tutte all'iperpiano H; pertanto esisterà una matrice rettangolare $\mathbf{R}$ di tipo $(n-1, n)$, tale che sia

$$\mathbf{M} - \mathbf{U}\,\varrho/n = \mathbf{P}\,\mathbf{R}\,. \tag{9}$$

Indicati con

$$p_{i\alpha}\,,\quad r_{\alpha k} \qquad i,\,k \in N\,,\quad \alpha \in N'$$

gli elementi delle matrici $\mathbf{P}$ ed $\mathbf{R}$ rispettivamente, gli elementi della matrice $\mathbf{M} - \mathbf{U}\ \varrho/n$ sono dati da

$$\sum_{\alpha \in N'} p_{i\alpha}\, r_{\alpha k} \qquad i,\,k \in N\,.$$

Dalle (9) e dalle (5) si ha

$$\mathbf{P}\,\mathbf{R}\,\mathbf{p}_\beta = \lambda_\beta\,\mathbf{p}_\beta \qquad \beta \in N'\,; \tag{10}$$

relazioni che possono essere scritte in modo equivalente come segue

$$\sum_{k \in N} r_{\alpha k}\, p_{k\beta} = \lambda_\beta\,\delta_{\alpha\beta} \qquad \alpha,\,\beta \in N'\,.$$

La formula (9) fornisce una rappresentazione della matrice $\mathbf{M}$ utile per i nostri scopi; infatti, osservando che si ha chiaramente:

$$\mathbf{U}\,\mathbf{F}(j) = 0 \qquad j \in N$$

si ottiene

$$\mathbf{M}^*(j) = \mathbf{E}(j)\,\mathbf{P}\,\mathbf{R}\,\mathbf{F}(j)$$

Calcoliamo ora le componenti del prodotto

$$\mathbf{R}\,\mathbf{F}(j)\,\mathbf{p}_\alpha(j)\,;$$

si ottiene:

$$\sum_{k \in N} (r_{\beta k} - r_{\beta j})\,(p_{k\alpha} - p_{j\alpha}\,\delta_{kj}) = \lambda_\beta\,\delta_{\alpha\beta}\,; \qquad \alpha,\,\beta \in N'\,.$$

In conclusione si ha quindi facilmente

$$\lambda_\alpha \, \mathbf{p}^*_\alpha (j) = \mathbf{M}^* (j) \, \mathbf{p}^*_\alpha (j) \qquad \alpha \in N' , \, j \in N. \tag{11}$$

Il significato della (11) otrebbe essere espresso con parole dicendo che la matrice $\mathbf{M}^*(j)$ (che è degenere e quindi ha un autovalore uguale a zero) ammette come autovettori non nulli gli autovettori di $\mathbf{M}$, diversi da $\mathbf{u}$, proiettati su $V(j)$, con gli stessi autovalori λ_α.

TIPOGRAFIA FUSI - 4/1977 - PAVIA